AE-1212

B.Sc. (Part - I)
Term End Examination, 2016-17

MATHEMATICS

Paper - II

Calculus

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से **एक** प्रश्न करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **five** questions. **One** question from each Unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) ε-δ विधि के प्रयोग से निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$\lim_{x \to 2} (2x + 7) = 11$$

By using ε-δ method, prove the following :

$$\lim_{x \to 2} (2x + 7) = 11$$

(*b*) दर्शाइए कि फलन

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{जब } x\geq 1 \\ 1-x & \text{जब } x<1 \end{cases}$$

$x=1$ पर अवकलनीय नहीं है।

Show that the function $f(x)$ defined by

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{when } x\geq 1 \\ 1-x & \text{when } x<1 \end{cases}$$

is not differentiable at $x = 1$.

2. (*a*) यदि $y=\sin^{-1}x$ हो, तो $(y_n)_0$ ज्ञात कीजिए।

If $y=\sin^{-1}x$, then find $(y_n)_0$.

(*b*) $\sin x$ का $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ की घातों में प्रसार कीजिए।

Expand $\sin x$ in powers of $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

इकाई / Unit-II

3. (*a*) दर्शाइए कि वक्र $x^2y^2-a^2(x^2+y^2)-a^3(x+y)+a^4=0$ की अनन्त स्पर्शिया एक वर्ग बनाती है, जिसके दो कोणीय बिन्दुओं से वक्र गुजरता है।

Show that the asymptotes of the curve $x^2y^2 - a^2(x^2 + y^2) - a^3(x + y) + a^4 = 0$ form a square, through two of its angular points the curve passes.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के लिए $e = \frac{a^2b^2}{p^3}$, जहाँ केन्द्र (0, 0) से बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा पर खींचे गये लम्ब की लम्बाई p है।

Prove that for the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $e = \frac{a^2b^2}{p^3}$, p being the length of the perpendicular drawn from the centre (0, 0) upon the tangent at the point (x, y).

4. (*a*) दर्शाइए कि वक्र $y^2(2a - x) = x^3$ का मूलबिन्दु पर कस्प होगा।

Show that the curve $y^2(2a - x) = x^3$ has a cusp at the origin.

(*b*) वक्र $a^2y^2 = x^3(2a - x)$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve $a^2y^2 = x^3(2a - x)$.

इकाई / Unit-III

5. (*a*) $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x+3}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x+3}}$.

(*b*) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find whole area of the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

6. (*a*) दर्शाइए कि हृदयाभों $r = a\,(1 + \cos\theta)$ तथा $r = a\,(1 - \cos\theta)$ के बीच परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल $\frac{a^2}{2}(3\pi-8)$ है।

Show that the area of the region included between the cardioids $r = a\,(1 + \cos\theta)$ and $r = a\,(1 - \cos\theta)$ is $\frac{a^2}{2}(3\pi-8)$.

(*b*) एस्ट्राइड $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ को x-अक्ष के परित: घुमाने से प्राप्त स्पिण्डल की शक्ल वाले ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

Find the volume of the spindle-shaped solid generated by the revolution of the astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ about the x-axis.

इकाई / Unit-IV

7. (*a*) हल कीजिए

$$(a^2 - 2xy - y^2)\, dx - (x + y)^2\, dy = 0$$

Solve

$$(a^2 - 2xy - y^2)\, dx - (x + y)^2\, dy = 0$$

(*b*) हल कीजिए

$$\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y$$

Solve

$$\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y$$

8. (*a*) हल कीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$$

Solve

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$$

(*b*) हल कीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4y=e^x+\sin 2x$$

Solve

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4y=e^x+\sin 2x$$

इकाई / Unit-V

9. (*a*) हल कीजिए

$$(3-x)\frac{d^2y}{dx^2}-(9-4x)\frac{dy}{dx}+(6-3x)y=0$$

Solve

$$(3-x)\frac{d^2y}{dx^2}-(9-4x)\frac{dy}{dx}+(6-3x)y=0$$

(*b*) प्राचल विचरण विधि द्वारा हल कीजिए :

$$\left(D^2-2D+1\right)y=\frac{e^x}{2x}$$

Solve by the method of variation of parameters :

$$\left(D^2 - 2D + 1\right) y = \frac{e^x}{2x}$$

10. हल कीजिए

(*a*) $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2y = 2\cos t - 7\sin t$

(*b*) $\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 2x = 4\cos t - 3\sin t$

Solve

(*a*) $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2y = 2\cos t - 7\sin t$

(*b*) $\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 2x = 4\cos t - 3\sin t$